

APLICAÇÕES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS EM MODELAGEM MATEMÁTICA PARA ENGENHARIA: A TEORIA DA VIGA ELÁSTICA

Ana Clara Deps¹; Letícia Frauches Pereira¹; Moacir César da Vitória Júnior²; Natan Sian das Neves¹; Roger da Silva Rodrigues³; Vitor Pancieri Pinheiro⁴;

1. Acadêmico do curso de Engenharia Civil da Faculdade Brasileira – MULTIVIX
2. Mestre em Física, docente da Faculdade Brasileira – MULTIVIX
3. Mestre em Engenharia Mecânica, docente da Faculdade Brasileira – MULTIVIX.
4. Especialista em Docência do Ensino Superior, docente da Faculdade Brasileira - MULTIVIX

RESUMO

O presente artigo expõe a relevância conceitual e matemática do uso de equações diferenciais voltadas para modelagem das curvas elásticas de elementos reticulares. A importância do domínio das técnicas correlatas às equações diferenciais é imprescindível ao aluno graduando de engenharia, uma vez que sua correta manipulação pode conduzir a interpretações físicas assertivas em relação a diversos fenômenos físicos, dentre eles a Teoria da Viga Elástica. O entendimento do binômio formado entre o modelo físico conceitual e seu equacionamento matemático associado compõe uma visão completa de um fenômeno físico. Logo, há necessidade de um entendimento mais aprimorado de equações diferenciais, uma vez que elas descrevem modelos de engenharia, não só como peça matemática, mas como elemento representativo da interpretação física de cada por menor do fenômeno trabalhado.

Palavras-chave: Equações. Diferenciais. Teoria. Viga. Elástica. Mecânica.

ABSTRACT

This article exposes the conceptual and mathematics relevance of the use of differential equations oriented to modeling of elastic curves of reticular elements. The importance of the field of techniques related to differential equations is essential to graduating engineering student, once its correct handling can lead to physical assertive interpretations in relation to various physical phenomena, including the Theory of Elastic Beam. The understanding of the binomial formed between the conceptual physical model and its associated mathematical modeling makes up a complete picture of the physical phenomenon. Therefore, there is need for a more enhanced understanding of differential equations, since they describe engineering models not only as a mathematical piece, but as a representative element of physical interpretation of each detail of the studied phenomenon.

Keywords: Equations. Differential. Theory. Elastic. Beam. Mechanics.

INTRODUÇÃO

No contexto de ensino de engenharia civil, uma das áreas de maior destaque é aquela voltada para a mecânica dos sólidos, que inicia a formação de seus alicerces desde a mecânica estática, permeando os conhecimentos de análise estrutural e resistência dos materiais e acaba por culminar em disciplinas cujo foco é o dimensionamento de estruturas.

A análise estrutural e o dimensionamento desses elementos envolvem de forma geral uma preocupação com a resistência e a rigidez. Segundo ALMEIDA (2009) a capacidade de resistir aos esforços solicitantes sem que ocorra ruptura e de não deformar excessivamente sobre a ação desses carregamentos externos caracteriza, respectivamente, os conceitos de resistência e rigidez. É no segundo conceito que reside o foco do presente desenvolvimento, uma vez que é possível determinar os deslocamentos sofridos por um elemento mecânico ou estrutura sob carregamento. Dentro do escopo de técnicas para determinação de deslocamentos e inclinações de estruturas, uma das ferramentas de maior relevância é a Teoria de Euler-Bernoulli para o cálculo da curva elástica em vigas. Tal teoria acaba por modelar o deslocamento em pontos da viga através de uma equação diferencial de quarta

ordem, em que tais deslocamentos dependem da magnitude da solicitação, da geometria e do material que constitui a viga (POPOV, 1978).

A importância das equações diferenciais é fundamental na modelagem matemática dos fenômenos físicos presentes em diversas áreas da ciência, em especial na engenharia. Dessa forma, assim como na teoria da viga elástica, diversos problemas de física aplicada utilizam ferramentas de equações diferenciais na composição de seus modelos matemáticos. Assim, o domínio dos conceitos e técnicas analíticas e computacionais ligadas às equações diferenciais é imprescindível.

TÉCNICAS ELEMENTARES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

No desenvolvimento matemático que virá a seguir, no contexto da Teoria de Curvas Elásticas de Euler, as técnicas requeridas para a solução da equação final são relativamente simples. Essa conclusão deve ser analisada com cautela, pois da mesma forma que existem equações diferenciais de simples solução também há aquelas cuja solução analítica nem mesmo é conhecida, demandando dessa forma uma solução aproximada por técnicas computacionais.

O método de solução das equações diferenciais a ser utilizado em nossas análises é um dos mais triviais existentes nos cenários desse tipo de equação, e se chama método de integração direta. Esse método pode apenas ser aplicado a uma classe específica de expressões diferenciais, denotada equações de variáveis separáveis. O formato geral dessas equações pode ser visto abaixo.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(x)} \quad (1)$$

Observando a equação acima é possível perceber que a parte da direita é como em toda uma função de x e y . Entretanto, de forma que é possível distinguir e separar em duas funções independentes, uma apenas de x e outra apenas de y . A grande vantagem de se trabalhar com uma equação desse tipo é que pode-se agrupar os termos dependentes de x com o infinitesimal dx de um lado e analogamente termos dependentes de y com o infinitesimal dy , permitindo uma posterior solução por integração simples (BOYCE; DIPRIMA, 2014)(KREISZIG, 2009). Por exemplo, uma equação diferencial cuja solução usa-se a técnica de separação de variáveis é expressa pela equação 2.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2y} \quad (2)$$

Separando as variáveis semelhantes e integrando ambos os termos, obtêm-se:

$$\int 2y dy = \int x^2 dx \Rightarrow y^2 = \frac{x^3}{3} + C \quad (3)$$

A constante C é determinada quando o problema apresenta algum valor inicial ou uma condição de contorno. Analisando outro exemplo um pouco mais interessante, envolvendo funções trigonométricas.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y \cos x}{1+2y^2} \quad (4)$$

Analogamente, separando as variáveis e integrando.

$$\int \frac{(1+2y^2)}{y} dy = \int \cos x dx \Rightarrow \ln|y| + y^2 = \text{sen}x + C \quad (5)$$

Com o objetivo de demonstrar de forma didática o mecanismo de solução de uma equação de variáveis separáveis, tomemos a seguinte equação diferencial abaixo para manipular.

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = -w(x) \quad (6)$$

Uma rápida análise no lado direito da equação 6 mostra uma função exclusiva de x , dada por $w(x)$, que representa a função de carregamento externo sobre uma estrutura. O termo produto EI presente no denominador representa o módulo de rigidez à flexão da estrutura e é considerado constante para a demonstração que segue. Como a equação 6 é de variáveis separáveis, um simples processo de integração sucessiva leva-nos a solução geral da equação 6, como pode ser visto na sequência algébrica abaixo.

$$EI \frac{d^3 y}{dx^3} = v = -\int w dx + C_1 \quad (7)$$

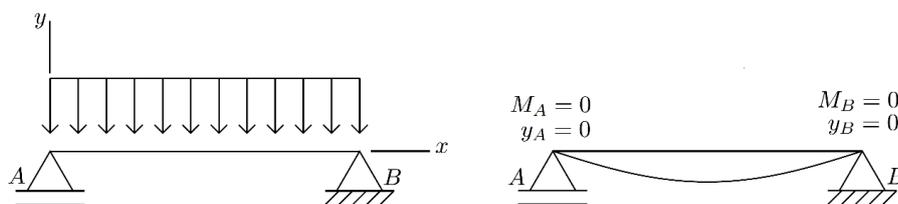
$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M = -\iint w dx + C_1 + C_2 \quad (8)$$

$$EI \frac{dy}{dx} = EI\theta = -\iiint w dx + \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2 x + C_3 \quad (9)$$

$$EI y = -\int \int \int w dx + \frac{1}{6}C_1 x^3 + \frac{1}{2}C_2 x^2 + C_3 x + C_4 \quad (10)$$

É fácil observar que como as múltiplas integrações são indefinidas, cada passo gera uma constante a determinar. Nossa capacidade de inferir sobre tais constantes depende do conhecimento sobre a variável diferenciada, y , e suas derivadas em alguns pontos particulares da estrutura.

Figura 1 – Condições de contorno em uma estrutura



Fonte: Elaborado pelo autor

Em uma viga biapoiada submetida a um carregamento uniforme (Figura 1), é possível analisar que as condições de contorno desse sistema estão localizadas nos pontos A e B , nos quais respectivamente são considerados que os descolamentos verticais e os momentos fletores são nulos. A partir destas informações, basta aplicar tais condições nas equações geradas para determinar cada uma das constantes C_1, C_2, C_3, C_4 .

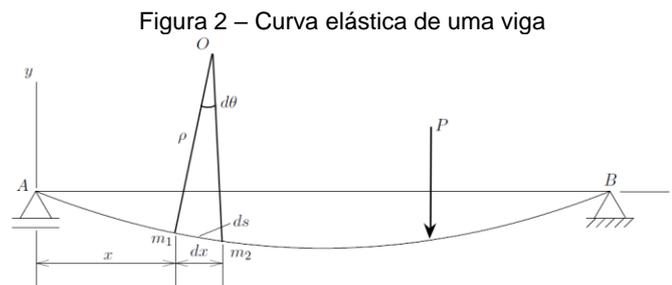
DESENVOLVIMENTO MATEMÁTICO

A Teoria da Viga Elástica foi concebida por Leonhard Euler e Daniel Bernoulli em meados dos séculos XVIII. Ambos foram extremamente influentes em diversas áreas do conhecimento, dentre elas mecânica dos fluidos, resistência dos materiais, cálculo diferencial entre outras.

As ideias que embasam a teoria são pautadas fortemente na geometria e cálculos diferencial e integral (NASH; POTTER, 2014)(TIMOSHENKO, 1975). Para iniciar o desenvolvimento matemático da equação da curva elástica para vigas é preciso relembrar uma expressão originária da modelagem de flexão pura, que determina a curvatura de um membro solicitado por momento fletor. Tal equação e sua dedução podem ser facilmente encontradas em textos de resistências dos materiais.

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{EI_z} \quad (11)$$

Considera-se a figura 2 mostrada abaixo como um esquema de uma viga deformada, cujos elementos geométricos são utilizados na dedução a seguir.



Fonte: Elaborada pelo autor

Observando o esquema acima, é trivial observar com apoio da trigonometria básica que:

$$ds = r d\theta \quad (12)$$

Rearranjando a equação 12 de forma a explicitar a curvatura, tem-se:

$$\frac{1}{r} = \left| \frac{d\theta}{ds} \right| \quad (13)$$

Vamos assumir o módulo como sendo positivo, já que os dois resultados são possíveis de acordo com o sinal do momento fletor.

$$\frac{1}{r} = \frac{d\theta}{ds} \quad (14)$$

Como na prática da engenharia civil trabalha-se com pequenas deformações temos que a curva elástica é achatada e pode-se adotar as hipóteses simplificadoras abaixo.

$$ds \approx dx \quad (15)$$

$$\theta \approx \text{tg} \theta = \frac{dy}{dx} \quad (16)$$

Aplicando as simplificações contidas nas equações 15 e 16 obtém-se:

$$\frac{1}{r} = \frac{d^2y}{dx^2} \quad (17)$$

Observe que de acordo com o sistema de coordenadas posto em nosso esquema da figura 2 o deslocamento vertical ou deflexão de cada ponto da viga é dado por y . Portanto, a expressão 17 explicita a curvatura em função da flecha. Dito isso, igualando-a às expressões 11 e 17 chega-se a equação diferencial da curva elástica:

$$EI_z \frac{d^2y}{dx^2} = M \quad (18)$$

A equação 18 evidencia a dependência da flecha com o carregamento, geometria e material, o que se mostra intuitivo. As relações diferenciais existentes entre carregamento, esforço cortante e momento fletor são postas abaixo.

$$\frac{dM}{dx} = V \quad \frac{dV}{dx} = -q \quad (19)$$

Por fim, utilizando as relações conceituais acima, é possível escrever a equação diferencial da curva elástica de duas formas alternativas, mostradas a seguir.

$$EI_z \frac{d^3y}{dx^3} = V \quad (20)$$

$$EI_z \frac{d^4y}{dx^4} = -q \quad (21)$$

Para o caso de vigas delgadas em que deformações mais significativas podem ocorrer, é preciso abandonar as simplificações 15 e 16 e considerar a tangente da curva elástica em cada ponto como sendo:

$$\theta = \arctg\left(\frac{dy}{dx}\right) \quad (22)$$

Com isso substitui-se a equação 22 na equação 14, tem-se:

$$\frac{1}{r} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{d \arctg\left(\frac{dy}{dx}\right) dx}{dx ds} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} \quad (23)$$

A equação 23 é chamada de fórmula exata da curva elástica, pois não contém aproximações para pequenas deformações, sendo uma expressão geral de cálculo. A mesma que foi concebida nos trabalhos de Leonhard Euler.

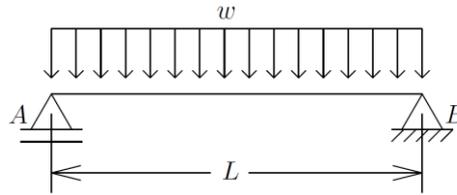
MODELAGEM NA ENGENHARIA

É grande a importância das equações diferenciais aplicadas à modelagem na engenharia. Essa relevância se deve ao fato de que vários dos principais fenômenos físicos pesquisados por engenheiros, matemáticos, físicos ou mesmo químicos são passíveis de modelagem através dessa classe tão versátil de equações. Dentre os fenômenos de interesse para a engenharia está o problema da determinação da curva elástica de uma viga deformada. Esse problema é modelado de forma eficaz pela equação da curva elástica mostrada na seção anterior. De forma a exemplificar a aplicação da teoria da viga elástica seguem dois casos de vigas recorrentes na engenharia civil: uma estrutura isostática e outra hiperestática.

ANÁLISE DE ESTRUTURA ISOSTÁTICA

Esse tipo de estrutura apresentada é configurada de forma a restringir seus graus de liberdade com, estritamente, os apoios necessários, ou seja, suas reações de apoio podem ser integralmente calculadas apenas com as equações de equilíbrio (BEER et al., 2015). Na figura 3 é apresentada uma viga biapoiada, submetida a um carregamento distribuído.

Figura 3 – Viga biapoiada submetido ao carregamento distribuído



Fonte: Elaborada pelo autor

É conveniente escrever a equação da curva elástica em relação ao carregamento que a estrutura está submetida.

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = -w \quad (24)$$

Para resolver a equação 24, basta usar a técnica de separação de variáveis e integrar ambos os lados da equação.

$$EI \frac{d^3 y}{dx^3} = V(x) = -wx + C_1 \quad (25)$$

Observe que surge uma constante C_1 , devido à integral ser indefinida. Repetindo esse processo para a equação 25, obtêm-se que:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M(x) = -\frac{1}{2}wx^2 + C_1x + C_2 \quad (26)$$

Como a viga está apoiada nas duas extremidades A e B , sabemos que $M(x = 0) = 0$ e $M(x = L) = 0$. Daí, aplicando tais condições de contorno na equação 26, obtemos os valores das constantes $C_2 = 0$ e $C_1 = \frac{1}{2}wL$

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{1}{2}wx^2 + \frac{1}{2}wLx \quad (27)$$

Integrando duas vezes a equação 27, chega-se nas equações da inclinação $\theta(x)$ e do deslocamento y .

$$EI \frac{dy}{dx} = EI\theta = -\frac{1}{6}wx^3 + \frac{1}{4}wLx^2 + C_3 \quad (28)$$

$$EIy = -\frac{1}{24}wx^4 + \frac{1}{12}wLx^3 + C_3x + C_4 \quad (29)$$

Contudo, é necessário ainda determinar as constantes, isso será realizado de forma análoga. Nos apoios A e B o deslocamento vertical é nula, isto é, as condições de contorno são $y(x = 0) = 0$ e $y(x = L) = 0$. Aplicando tais informações na equação 29, as constantes serão iguais $C_3 = 0$ e $C_4 = -\frac{1}{24}wL^3$.

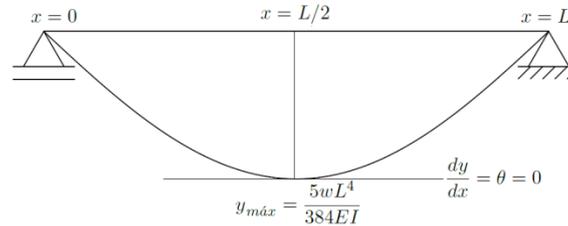
$$y = \frac{w}{24EI}(-x^4 + 2Lx^3 - L^3x) \quad (30)$$

Aplicando o valor da constante $C_3 = 0$ na equação 28 e igualando a zero, podemos notar que a inclinação é nula quando $x = L/2$. Substituindo $x = L/2$ na equação 30, obtêm-se o deslocamento vertical máximo ou flecha máxima $y_{\text{máx}}$.

$$|y|_{\text{máx}} = \frac{5wL^4}{384EI} \quad (31)$$

A flecha máxima, que ocorre no trecho de inclinação nula, está exposta no gráfico da configuração deformada abaixo.

Figura 4 – Linha elástica da viga



Fonte: Elaborada pelo autor

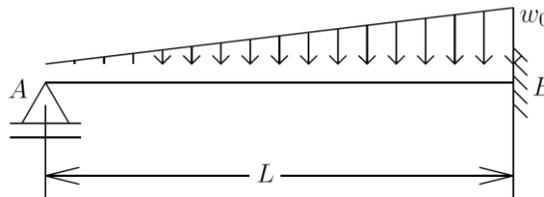
Uma rápida inspeção na equação 31 mostra que a flecha da viga biapoiada em questão depende da potência quarta de seu vão. Nesse raciocínio é possível inferir que vigas esbeltas não devem ter um grande trecho de vão entre apoios, uma vez que grandes deslocamentos poderiam ser observados, caracterizando uma peça com rigidez insuficiente, já que sofre deformações excessivas.

ANÁLISE DE ESTRUTURA HIPERESTÁTICA

As estruturas hiperestáticas possuem uma configuração diferente da isostática, pois em tais tipos de estruturas as equações de equilíbrio não são suficientes para determinar as reações de apoio e os carregamentos internos, ou seja, possuem um número de reações superiores ao necessário para manter a estrutura em equilíbrio, tornando mais complexa a sua análise (HIBBELER, 2006) (UGURAL, 2000).

Para resolver tais tipos de vigas, são conhecidos basicamente três métodos, isto é, método das forças, deslocamentos e Cross. Porém, é possível determinar as reações de apoio com os conceitos da teoria da curva elástica, como é analisado na viga demonstrada pela figura 5.

Figura 5 – Viga hiperestática com carregamento triangular ao longo do eixo



Fonte: Elaborada pelo autor

Realizando um corte genérico em um ponto qualquer x da viga, podemos escrever que o momento é dado pela seguinte relação:

$$M(x) = R_A x - \frac{w_0 x^3}{6L} \quad (32)$$

Substituindo a equação 32 na equação da curva elástica.

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = R_A x - \frac{w_0 x^3}{6L} \quad (33)$$

Integrando duas vezes a equação 33, obtêm-se as equações para a inclinação $\theta(x)$ e deslocamento vertical $y(x)$.

$$EI \frac{dy}{dx} = EI \theta = \frac{1}{2} R_A x^2 - \frac{w_0 x^4}{24L} + C_1 \quad (34)$$

$$EI y = \frac{1}{6} R_A x^3 - \frac{w_0 x^5}{120L} + C_1 x + C_2 \quad (35)$$

As constantes C_1 e C_2 serão determinadas através das condições de contorno. Sabe-se que na extremidade A temos que $y(x = 0) = 0$, logo $C_2 = 0$. Na extremidade B (engastada) teremos as seguintes condições de contorno $\theta(x = L) = 0$ e $y(x = L) = 0$, aplicando nas equações 34 e 35 chegaremos no seguinte sistema.

$$\begin{cases} \frac{1}{2} R_A L^3 - \frac{w_0 L^3}{24} + C_1 = 0 \\ \frac{1}{6} R_A L^3 - \frac{w_0 L^4}{120} + C_1 L = 0 \end{cases} \quad (36)$$

O sistema é facilmente solucionado multiplicando a primeira equação por L e subtraindo da segunda equação, com isso obtêm o valor da reação na extremidade A.

$$R_A = \frac{1}{10} w_0 L \quad (37)$$

Para determinar a constante C_1 , aplicamos a equação 37 na expressão 34.

$$C_1 = -\frac{1}{120} w_0 L^3 \quad (38)$$

Por fim, substituindo os valores das constantes e da reação no apoio A, podemos escrever uma expressão para a inclinação e o deslocamento.

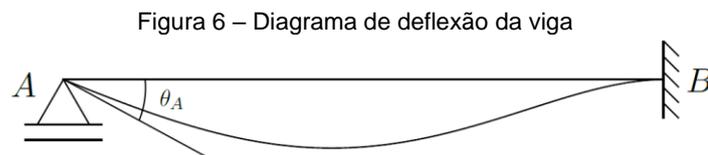
$$y = \frac{w_0}{120EI} (-x^5 + 2L^2 x^3 - L^4 x) \quad (39)$$

$$\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{w_0}{120EI} (-5x^4 + 6L^2 x^2 - L^4) \quad (40)$$

Fazendo $\theta(x = 0)$, chegaremos na inclinação na extremidade A.

$$\theta_A = -\frac{w_0 L^3}{120EI} \quad (41)$$

A inclinação máxima posta pela equação 41 é ilustrada pela figura 6. É interessante observar que esta acontece no apoio de primeiro gênero, em detrimento ao engastamento que por conceito tem inclinação nula.



Fonte: Elaborada pelo autor

O caso hiperestático trazido pelo equacionamento a priori releva uma grande potencialidade do método da integração dupla: a capacidade de calcular reações de apoio em estruturas hiperestáticas. Portanto, apesar de seu processo matemático ser longo, devido a sua aplicação simples, compõe ótima ferramenta inicial para análise de estruturas indeterminadas mais simples.

CONCLUSÃO

Em linhas gerais é possível dizer que as disciplinas voltadas para física e para matemática nas graduações de engenharia têm por objetivo central a formação de um arcabouço de conhecimentos que visa posterior aplicação em técnicas modelagem matemática, sendo estas aplicadas a uma ampla gama de fenômenos físicos. Dentre tais fenômenos a deflexão de vigas figura como área de estudo importante para a engenharia civil e mecânica.

A deflexão de vigas é assunto de grande relevância prática, ao passo que seu domínio constitui ferramenta básica para o projeto de vigas na construção civil e elementos de máquina. Entretanto, um entendimento pleno sobre o fenômeno só pode ser alcançado com suficiente capacidade de manipulação sobre a equação diferencial da curva elástica, o que deixa claro que um engenheiro só exhibe característica de análise natural uma vez que apresente, em paralelo, uma base sólida de conhecimentos sobre os modelos matemáticos e sua álgebra associada.

A importância do conhecimento, uso e manipulação de equações diferenciais pode ser mais uma vez reforçada, pois sem estas habilidades a modelagem não pode ser feita de forma consistente. Por fim é importante destacar que assim como o ciclo básico edifica uma ponte entre as ciências puras de física e matemática com a modelagem aplicada à engenharia, esta também liga a vertente acadêmica à aplicação prática. Em suma, todos os projetos reais que são executados na construção civil, assim como *softwares* responsáveis por dimensionamentos nas mais diversas áreas de engenharia têm como base os modelos matemáticos propostos pela academia.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, M. C. F. de. ***Estruturas isostáticas***. São Paulo: Oficina de Textos, 2009.
- BEER, F. P. et al. ***Mecânica dos Materiais***. 7ª Edição. Porto Alegre: AMGH Editora, 2015.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. ***Equações diferenciais elementares e problemas de contorno***(9ª edição). LTC Editora., Rio de Janeiro, 2014.
- HIBBELER, R. C. ***Resistência dos materiais***. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.
- KREYSZIG, E. ***Matemática superior para engenharia***. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2009.
- NASH, W. A.; POTTER, M. C. ***Resistência dos Materiais-5***. Porto Alegre: Bookman Editora, 2014.
- POPOV, E. P. ***Introdução a mecânica dos sólidos***. São Paulo: Edgard Blucher, 1978.
- TIMOSHENKO, S. ***Resistência dos materiais***. Rio de Janeiro: Livros técnico e científico editora, 1975.
- UGURAL, A. C. ***Mecânica dos materiais***. Rio de Janeiro: Grupo Gen-LTC, 2000.