

APLICAÇÕES DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS NA MODELAGEM MATEMÁTICA PARA ENGENHARIA: UMA INTRODUÇÃO À TEORIA DA CAMADA LIMITE

Moacir César da Vitória Júnior²; Natan Sian das Neves¹; Roger da Silva Rodrigues³; Vitor Pancieri Pinheiro⁴

1. Acadêmico do curso de Engenharia Civil da Faculdade Brasileira – MULTIVIX
2. Mestre em Física, docente da Faculdade Brasileira – MULTIVIX.
3. Mestre em Engenharia Mecânica, docente da Faculdade Brasileira – MULTIVIX.
4. Especialista em Docência do Ensino Superior, docente da Faculdade Brasileira – MULTIVIX.

RESUMO

O presente artigo busca demonstrar a importância dos conceitos de equações diferenciais na modelagem matemática voltada ao desenvolvimento da camada limite sobre uma placa plana sólida. O conhecimento das técnicas de equações diferenciais é de suma relevância na formação de profissionais e graduandos de engenharia, pois tais permitem descrever matematicamente e compreender como os fenômenos físicos se comportam na realidade. Nesse contexto, o domínio das equações diferenciais se tornou um objeto elementar e prioritário, pois até equações simples que são resolvidas analiticamente podem ilustrar um problema real, contudo, problemas envolvendo modelagens com equações diferenciais mais complexas já são solucionadas com a utilização dos métodos numéricos.

Palavras-chave: Equações. Diferenciais. Modelagem. Camada. Limite.

ABSTRACT

This article seeks to demonstrate the importance of the concepts of differential equations in the mathematical modeling focused on the development of the boundary layer on a solid flat plate. Knowledge of the techniques of differential equations is of paramount importance in the formation of professional and engineering graduate students, as these allow mathematically describe and understand how physical phenomena behave in reality. In this context, the field of differential equations became an elementary and primary object, because even simple equations which are solved can analytically illustrate a real problem, however, problems involving modeling more complex differential equations are already solved with the use of numerical methods.

Keywords: Equations. Differential. Modeling. Boundary Layer.

INTRODUÇÃO

A engenharia contempla uma vasta área de aplicações de fenômenos físicos presente na natureza, em especial a engenharia mecânica possui conceitos e modelagens matemáticas bem aprimoradas, o que permite ampliar tais fundamentos em diversas áreas da engenharia. Dentre elas, a área de termo-fluidos é um horizonte de grande relevância científica e prática para engenharia.

A mecânica dos fluidos é um dos pilares da termo-fluidos, esse ramo estuda as propriedades e o comportamento dos fluidos, essa área é extremamente encantadora e deslumbrante devido a sua matemática refinada e um amplo conjunto de aplicações práticas, como na hidráulica, sistemas de ventilação e ar condicionado, aerodinâmica, automobilismo e ainda na medicina.

Essa diversidade de aplicações da mecânica dos fluidos não foi fácil de ser atingida, pois a grande complexidade de trabalhar com fluidos e a falta de tecnologia atrasaram esses fundamentos. Porém, no ano de 1904, um dos maiores cientistas e atualmente conhecido como pai da mecânica dos fluidos moderna, Ludwig Prandtl trouxe uma nova perspectiva que

mudou radicalmente o pensamento em referência aos problemas relacionados a fluidos. Prandtl propôs separar um escoamento em duas regiões: uma região na qual a viscosidade é nula, cuja equação clássica de Euler é válida e uma região estreita próxima à superfície em que os efeitos viscosos devem ser considerados nessa região denotada como camada limite (FREIRE, 2002) (CANEDO, 2000).

Nesse contexto, as equações diferenciais surgem como um elo para ligar os fenômenos físicos com a modelagem matemática, pois na maioria dos problemas de engenharia as equações de governo são descritas por equações diferenciais. Com isso, fica evidente que um estudo mais rico e conceitual sobre os fundamentos de equações diferenciais proporciona um efeito gigantesco na formação dos engenheiros contemporâneos, sendo aptos a resolver e lidar com diversas circunstâncias práticas no cotidiano.

TÉCNICAS ELEMENTARES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

As equações diferenciais possuem uma aplicabilidade gigantesca em um leque de problemas bem significantes na engenharia, como por exemplo, escoamentos de fluidos, a teoria da viga elástica, condução de calor, hidráulica dos solos, sistemas de vibrações mecânicas e flambagem de colunas. Dependendo de como for analisado tais problemas é possível resolver analiticamente, contudo, os problemas próximos da realidade possuem equações diferenciais com um nível de complexidade elevado. Então surge a grande importância de classificar as equações diferenciais, afim de entender quais tipos de equações diferenciais retratam os fenômenos físicos, buscando a partir disso, métodos, técnicas e conceitos para resolver tal equação (BOYCE; DIPRIMA, 2013) (ZILL; CULEN, 2001).

CLASSIFICAÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

As inúmeras equações diferenciais que estão presentes nas mais diversas modelagens matemáticas dos fenômenos físicos podem em modo geral receber algumas classificações, como, por exemplo, em relação ao tipo, ordem, linearidade e homogeneidade (Figura 1).

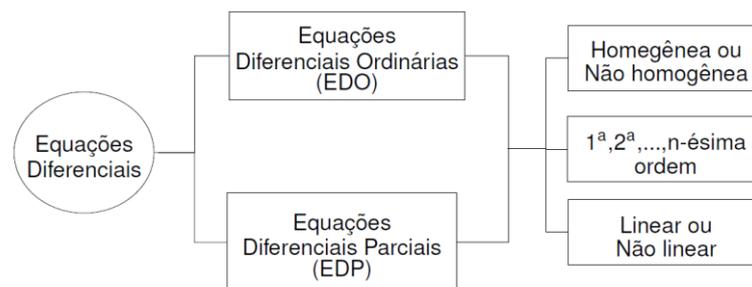


Figura 1: Classificação geral das equações diferenciais.
Fonte: Elaborado pelo autor

Sem dúvida quando se analisa uma equação diferencial, uma das mais importantes classificações é referente a sua natureza, isto é, definir se uma equação diferencial é uma EDO, depende de um único parâmetro, por exemplo, a equação 1 esboça a equação da curva elástica para deflexão de vigas.

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{q}{EI} \quad (1)$$

Por outro lado, as equações diferenciais que variam ao longo de dois ou mais parâmetros são denominadas como EDP, por exemplo, a equação 2 apresenta a equação básica do fluxo bidimensional para movimento de água nos solos.

$$k_x \frac{d^4 h}{dx^4} + k_z \frac{d^4 h}{dz^4} = 0 \quad (2)$$

Então, é muito importante conseguir distinguir qual tipo de equação diferencial o problema está submetido, pois é comum não conseguir escrever a solução exata, na qual as técnicas elementares para a solução de uma equação diferencial não resolvem o problema. Um cenário muito comum que ocorre tais eventos são os casos envolvendo fluidos, por terem a equação de Navier-Stokes, que é uma equação diferencial parcial de não linearidade e com muitos termos que podem afetar significativamente os resultados finais.

Com isso vem a necessidade de encontrar formas para resolver tais tipos de equações, como o uso de hipóteses simplificadoras, que acarreta em um modelo mais simples de solução, análise de ordem de grandeza, ou seja, quando se despreza alguns termos comparando com parâmetros e, principalmente, a utilização dos métodos numéricos computacionais.

FILOSOFIA DOS MÉTODOS NUMÉRICOS

Os métodos numéricos são uma ferramenta de extrema relevância na solução de problemas encontrados na engenharia, física, matemática, química e diversas áreas da ciência. São métodos que fornecem resultados aproximados, porém muito eficientes para a solução de diversos tipos de equações matemáticas que governam os problemas físicos. Nesse contexto existem vários métodos numéricos que foram desenvolvidos ao longo do tempo com o objetivo de aproximar soluções, por exemplo, métodos das diferenças finitas, volumes finitos, elementos finitos, Newton-Rhapson, Runge-kutta, Euler, regra de Simpson e entre vários outros métodos e técnicas. Ressaltando que a escolha do método correto pode diminuir significativamente algum erro nos resultados finais do problema.

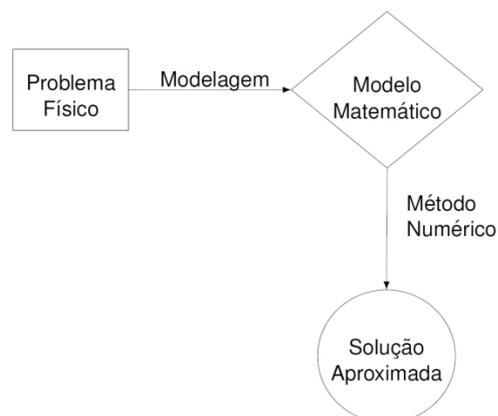


Figura 2: Filosofia geral de aplicação dos métodos numéricos
Fonte: Adaptado de Carvalho e Maia (1987, p. 01)

Nesse âmbito, os métodos numéricos em geral possuem uma filosofia de aplicação semelhante entre si (Figura 2). Muitos problemas e circunstâncias que ocorrer na natureza são representados por equações diferenciais (podendo ser parciais ou ordinárias), esse processo de modelar o problema físico (utilizando hipóteses simplificadoras) já é a primeira aproximação de engenharia. Logo, em alguns casos é possível resolver as equações diferenciais que modelam os fenômenos de forma analítica, porém em certas ocasiões as

equações são complexas e os métodos numéricos são o caminho mais fácil, gerando assim a segunda aproximação do problema. Um dos métodos mais conhecidos e famosos que resolver equações diferenciais é o método de Runge-Kutta, ele oferece um percentual de erro bem insignificante (KREYSZIG, 2009)(GILAT; SUBRAMANIAM, 2009).

MÉTODO DE RUNGE-KUTTA

As equações diferenciais ordinárias ou simplesmente EDO, frequentemente, descrevem fenômenos da natureza. Existem várias formas e técnicas para obter uma solução de uma EDO, o método de Runge-Kutta é um bom caminho. Esse método pode ser aplicado quando temos uma equação diferencial com o seguinte formato:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (3)$$

Deixando claro que o método de Runge-Kutta não se restringe à resolução de uma EDO de 1º ordem. Para resolver uma EDO de ordem mais alta pelo método, basta fazer uma mudança de variável. Logo, as equações em geral podem ser solucionadas utilizando a expressão determinada por Carl Runge e Martin Wilhelm Kutta em meados de 1900 (VALLE, 2012).

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (4)$$

Em que k_1, k_2, k_3 e k_4 são constantes já definidas como:

$$k_1 = hf(x_n, y_n) \quad (5a)$$

$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}k_1\right) \quad (5b)$$

$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}k_2\right) \quad (5c)$$

$$k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3) \quad (5d)$$

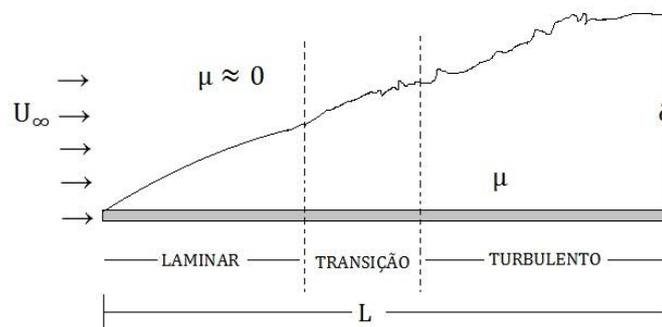
Esse método é relativamente “fácil” de ser aplicado na solução das equações ordinárias, ou seja, tal método nada mais é do que um sistema de interação termo a termo. Em muitas circunstâncias não é muito agradável buscar tentar resolver uma equação diferencial analiticamente, e sim a utilização de um algoritmo computacional que fornecerá valores aproximados do problema. Todavia, é muito importante compreender como funciona cada etapa do método antes de aplicá-lo a uma rotina de programação (CARVALHO; MAIA, 1987).

MODELAGEM MATEMÁTICA

A teoria da camada limite é uma das ideias mais extraordinárias e importantes da mecânica dos fluidos, desenvolvida por Ludwig Prandtl em 1904, tal ideia é uma ponte entre escoamentos sem viscosidade, na qual a equação de Euler é válida, porém não representam de forma adequada os problemas de engenharia envolvendo fluido e escoamentos viscosos que são representados pela equação de Navier-Stokes. A teoria da camada limite afirma que é possível analisar o escoamento em torno de um corpo em duas regiões. Isto é, o escoamento próximo à superfície do corpo seria considerado os efeitos viscosos, e fora dessa região os efeitos viscosos seriam desprezíveis. Essa região que separa o tipo de escoamento foi denominada camada limite (Figura 3), que é uma região de pequena espessura, próxima a superfície do corpo, com gradiente de velocidade grande e as forças viscosas sendo

relevante nas análises (FOX; MCDONALD; PRITCHARD, 2006) (ÇENGEL; CIMBALA, 2007) (FREIRE, 2002).

Figura 3: Desenvolvimento da camada limite.



Fonte: Elaborado pelo autor

A partir da equação que rege a mecânica dos fluidos, ou seja, equação de Navier-Stokes, Prandtl realizou uma análise de ordem de grandeza (ou magnitude), e obteve as equações da camada limite. Ou seja, uma análise de ordem de grandeza trás em sua essência uma comparação entre grandezas e assim é possível em alguns casos desprezas certas propriedades que não possuem tanta influência nas análises.

O adimensional número de Reynolds é um termo que relaciona as forças inerciais e viscosas num escoamento e é de grande relevância para diversos tipos de escoamento, pois permite fazer uma análise prévia e rápida sobre o escoamento estudado. Para um escoamento externo sobre uma placa plana, podemos escrever que:

$$Re = \frac{\rho U_{\infty} L}{\mu} \quad (6)$$

Onde ρ e μ são respectivamente a massa específica e a viscosidade do fluido, U_{∞} e L são a velocidade da corrente livre (fora da camada limite) e o comprimento característico da placa. Dentro desse amplo conjunto de problemas da mecânica dos fluidos, é necessário usar algumas restrições na modelagem, a fim de simplificar a equação de Navier-Stokes, então considere as seguintes hipóteses simplificadoras:

- I. Fluido Newtoniano: Tensão de cisalhamento proporcional à taxa de deformação.
- II. Massa específica (ρ) e viscosidade (μ) são constantes.
- III. Escoamento em regime laminar.
- IV. Escoamento em regime permanente.
- V. Escoamento bidimensional.
- VI. A ordem de magnitude da espessura é muito menor que o comprimento da placa ($\delta \ll L$).

Para realizarmos as análises de ordem de grandeza (ou magnitude), vamos determinar cada ordem de grandeza de cada termo das equações (Tabela 1).

Tabela 1: Ordem de grandeza dos termos

Termos da Equação	Ordem de Grandeza
\mathbf{u}	$[\mathbf{U}_\infty]$
V	$[V_\infty]$
x	$[L]$
y	$[\delta]$
ρ	$[\rho]$
μ	$[\mu]$

Fonte: Elaborado pelo autor

Da equação da continuidade, podemos obter as primeiras relações em termos de ordem de grandeza para auxiliar na demonstração das equações da camada limite. Tendo em mente, estamos considerando ρ sendo constante. A equação da continuidade na forma vetorial fica:

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (7)$$

Em coordenadas cartesianas:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (8)$$

Como o escoamento é bidimensional, a componente de velocidade w será considerada nula.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (9)$$

Fazendo uma análise de ordem de magnitude (ou grandeza) para cada termo da equação 9, temos que:

$$\left[\frac{U_\infty}{L} \right] + \left[\frac{V_\infty}{\delta} \right] = 0 \quad (10)$$

$$[V_\infty] = \left[U_\infty \frac{\delta}{L} \right] \quad (11)$$

Como a espessura (δ) é muito menor que o comprimento (L) da placa, tem que V_∞ é bem menor que U_∞ . Logo, isto acarretará que $v \ll u$. Para apresentar as equações da camada limite, trabalharemos com a equação que governa grande parte dos fenômenos da mecânica dos fluidos, a equação de Navier-Stokes ou equação da quantidade de movimento.

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V}(\nabla \cdot \vec{V}) \right) = -\vec{\nabla}P + \rho \vec{g} + \mu(\nabla^2 \vec{V}) \quad (12)$$

O formato mais conhecido da equação de Navier-Stokes e quando se expressa em coordenadas cartesianas, obtendo-se o conjunto de três equações 13a, 13b e 13c;

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho g_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (13a)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \rho g_y - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (13b)$$

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \rho g_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (13c)$$

Analisando a equação de Navier-Stokes na direção x:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho g_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (14)$$

Atribuindo as hipóteses simplificadoras e lembrando que a gravidade atua somente na vertical, o termo ρg_x será nulo, então ficamos com a seguinte equação:

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (15)$$

Inicialmente, a ordem de grandeza do gradiente de pressão em x não será analisada. A ordem de grandeza de cada termo da equação (15) fica expressa como:

$$\left[\rho U_\infty \frac{U_\infty}{L} \right] + \left[\rho V_\infty \frac{U_\infty}{\delta} \right] = \left[\mu \frac{U_\infty}{L^2} \right] + \left[\mu \frac{U_\infty}{\delta^2} \right] \quad (16)$$

Pela equação da continuidade, obtivemos o termo V_∞ , substituindo na equação (16).

$$\left[\rho U_\infty \frac{U_\infty}{L} \right] + \left[\rho U_\infty \left(\frac{\delta}{L} \right) \frac{U_\infty}{\delta} \right] = \left[\mu \frac{U_\infty}{L^2} \right] + \left[\mu \frac{U_\infty}{\delta^2} \right] \quad (17)$$

Observando a equação acima e recordando que existe uma relação entre a espessura δ da camada limite e o comprimento da placa L , ou seja, nas hipóteses simplificadoras foi proposto que $\delta \ll L$. Então, seguindo esta ideia é razoável dizer que:

$$\left[\mu \frac{U_\infty}{L^2} \right] \ll \left[\mu \frac{U_\infty}{\delta^2} \right] \quad (18)$$

Portanto, com base na expressão 18, podemos desprezar a derivada de ordem segunda em relação a x.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (19)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \approx 0 \quad (20)$$

Desse modo, a equação de Navier-Stokes na direção x vai se reduzir a seguinte equação:

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (21)$$

Dividindo a equação 21 pela massa específica ρ , obteremos umas das equações da camada limite. Em que $\vartheta = \mu/\rho$ é a viscosidade cinemática do fluido.

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \vartheta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (22)$$

Analisando os termos convectivos e viscosos da equação 22 em relação a sua ordem de grandeza, podemos considerar que a ordem de grandeza dos termos é aproximadamente:

$$\left[\rho U_{\infty} \frac{U_{\infty}}{L} \right] \approx \left[\mu \frac{U_{\infty}}{\delta^2} \right] \quad (23)$$

Generalizando o comprimento (L) da placa, por um comprimento quaisquer (x). Podemos definir que a espessura da camada limite está intimamente ligada com o número de Reynolds e o comprimento da placa.

$$\delta \approx \sqrt{\frac{\mu x}{\rho U_{\infty}}} \Rightarrow \frac{\delta}{x} \approx \frac{1}{\sqrt{Re}} \quad (24)$$

Estudando cada termo da equação de Navier-Stokes na direção y.

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \rho g_y - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (25)$$

Aplicando as hipóteses simplificadoras na equação de Navier-Stokes. Tendo em mente que as forças de campo ρg_y não é desprezível em relação à y, pois a gravidade atua na vertical.

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \rho g_y - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (26)$$

Desconsiderando inicialmente o gradiente de pressão e as forças de campo na análise de ordem de magnitude.

$$\left[\rho U_{\infty} \frac{V_{\infty}}{L} \right] + \left[\rho V_{\infty} \frac{V_{\infty}}{\delta} \right] = \left[\mu \frac{V_{\infty}}{L^2} \right] + \left[\mu \frac{V_{\infty}}{\delta^2} \right] \quad (27)$$

Aplicando a relação obtida na equação da continuidade (V_{∞}) na equação 27, tem-se que:

$$\left[\rho U_{\infty} \left(\frac{U_{\infty} \delta}{L} \right) \frac{1}{L} \right] + \left[\rho \left(\frac{U_{\infty} \delta}{L} \right) \left(\frac{U_{\infty} \delta}{L} \right) \frac{1}{\delta} \right] = \left[\mu \left(\frac{U_{\infty} \delta}{L} \right) \frac{1}{L^2} \right] + \left[\mu \left(\frac{U_{\infty} \delta}{L} \right) \frac{1}{\delta^2} \right] \quad (28)$$

$$\left[\rho U_{\infty} \frac{U_{\infty} \delta}{L L} \right] + \left[\rho U_{\infty} \frac{\delta U_{\infty} \delta}{L \delta L} \right] = \left[\mu \frac{U_{\infty} \delta}{L^2 L} \right] + \left[\mu \frac{U_{\infty} \delta}{\delta^2 L} \right] \quad (29)$$

Analisando cada termo da equação 29, concluímos que a derivada de ordem segunda em relação a x pode ser desconsiderada, pois $\delta \ll L$.

$$\left[\mu \frac{U_{\infty} \delta}{L^2 L} \right] \ll \left[\mu \frac{U_{\infty} \delta}{\delta^2 L} \right] \quad (30)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (31)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \approx 0 \quad (32)$$

É extrema importância nesse momento fazer comparação global das análises realizando a equação de Navier-Stokes na direção x e y. Note que, o estudo de ordem de magnitude dos termos convectivos e viscosos de ambas as equações possuem uma relação bem próxima entre si, ou seja, comparando a equação 17 com a equação 29 respectivamente.

$$\left[\rho U_{\infty} \frac{U_{\infty}}{L} \right] + \left[\rho U_{\infty} \frac{\delta U_{\infty}}{L \delta} \right] = \left[\mu \frac{U_{\infty}}{L^2} \right] + \left[\mu \frac{U_{\infty}}{\delta^2} \right] \quad (33)$$

Reorganizando os termos da equação 33.

$$\left[\rho U_{\infty} \frac{U_{\infty}}{L} \left(\frac{\delta}{L} \right) \right] + \left[\rho U_{\infty} \frac{\delta U_{\infty}}{L \delta} \left(\frac{\delta}{L} \right) \right] = \left[\mu \frac{U_{\infty}}{L^2} \left(\frac{\delta}{L} \right) \right] + \left[\mu \frac{U_{\infty}}{\delta^2} \left(\frac{\delta}{L} \right) \right] \quad (34)$$

Podemos verificar um elo entre as duas equações acima, daí escreve que:

$$\text{Equação 34} \approx \frac{\delta}{L} \text{Equação 33} \quad (35)$$

Ordem de grandeza das variáveis na direção y são menores que as variáveis na direção x , pois $\delta \ll L$. Logo, os termos convectivos e viscosos da equação y , podem ser desconsiderados.

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \rho g - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (36)$$

Então atribuímos que $v \ll u$, acarretará que a equação de Navier-Stokes na direção y se reduzirá a seguinte expressão.

$$\rho g - \frac{\partial P}{\partial y} \approx 0 \quad (37)$$

Como a pressão está dependendo de uma coordenada somente, podemos remover a derivada parcial e atribuir uma derivada total. E frisando que o termo ρg fica com o sinal invertido, devido à coluna de fluido.

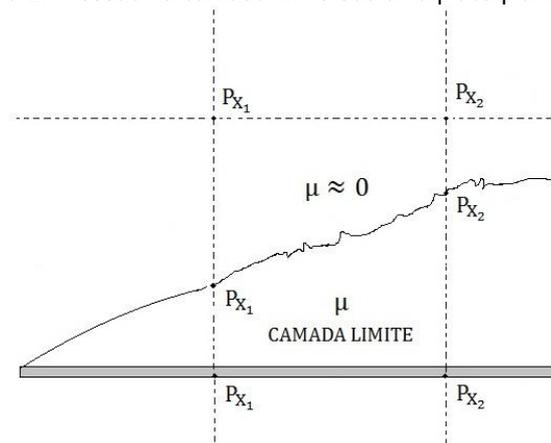
$$\frac{dP}{dy} = -\rho g \quad (38)$$

Separando as variáveis semelhantes e integrando ambos os lados da equação 38, obtém-se que:

$$P = -\rho g y + C \quad (39)$$

Essa consideração é muito conveniente, pois temos que o valor máximo de y é a espessura da camada limite δ . Como a espessura da camada limite é pequena, temos que a coluna de fluido na camada limite pode ser desconsiderada.

Figura 2: Pressão na camada limite sob uma placa plana sólida



Fonte: Elaborado pelo autor

Por isso, chegamos à conclusão que a pressão não variará em y . Logo, o gradiente de pressão vertical é desprezível na equação da quantidade de movimento.

$$\frac{\partial P}{\partial y} \approx 0 \quad (40)$$

Em outras palavras, dentro e fora da camada limite a pressão será a mesma (Figura 2), logo, a pressão só variará na direção x . Isso é cômodo para as análises, porque dentro e fora da camada limite a pressão em relação a y é aproximadamente a mesma. Assim é possível determinar qualquer valor da pressão em x .

$$\left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{\substack{\text{DENTRO DA} \\ \text{CAMADA LIMITE} \\ \mu \neq 0}} \approx \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{\substack{\text{FORA DA} \\ \text{CAMADA LIMITE} \\ \mu \approx 0}} \quad (41)$$

Como a pressão dentro e fora da camada limite é a mesma, podemos analisar a pressão fora da camada limite, na qual a viscosidade (μ) é aproximadamente nula. Imediatamente, fora da camada limite é possível utilizar a equação de Bernoulli.

$$P + \rho gy + \frac{\rho u^2}{2} = \text{cte} \quad (42)$$

Aplicando a equação 42 entre os pontos x_1 e x_2 . Como o referencial em y não varia temos que $y_1 = y_2 = y$. Os termos gravitacionais da equação de Bernoulli se anularão, então podemos escrever que:

$$P_{x_1} + \frac{\rho(u_{x_1})^2}{2} = P_{x_2} + \frac{\rho(u_{x_2})^2}{2} \quad (43)$$

Dividindo a equação 43 pela massa específica ρ .

$$\frac{P_{x_1}}{\rho} - \frac{P_{x_2}}{\rho} = \frac{(u_{x_2})^2}{2} - \frac{(u_{x_1})^2}{2} \quad (44)$$

Admitindo que x_1 e x_2 sejam tão próximos que se possa escrever que $x_2 = x_1 + \Delta x$.

$$\frac{P_{x_1} - P_{x_1 + \Delta x}}{\rho} = \frac{(u_{x_1 + \Delta x})^2 - (u_{x_1})^2}{2} \quad (45)$$

Dividindo por Δx a equação 45, e tomando o limite quando $\Delta x \rightarrow 0$, temos que:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P_{x_1 + \Delta x} - P_{x_1}}{-\rho \Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(u_{x_1 + \Delta x})^2 - (u_{x_1})^2}{2 \Delta x} \quad (46)$$

Desse modo, chegamos a seguinte expressão:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial (u_x)^2}{\partial x} \quad (47)$$

Utilizando os conceitos primários de cálculo, sabe-se que:

$$\frac{\partial (u_x)^2}{\partial x} = 2u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (48)$$

Substituindo a equação 48 em 47, temos a seguinte relação matemática.

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (49)$$

Se atribuirmos $y = \delta$ e $u_x = U_\infty$. E lembrando que a velocidade da corrente livre é constante, a derivada será nula.

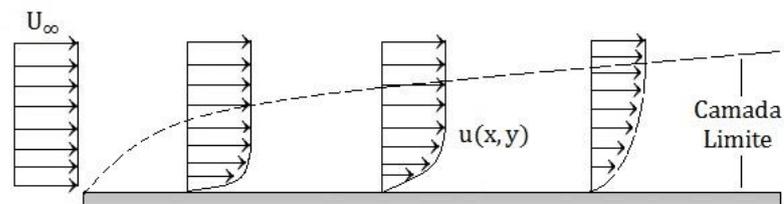
$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = U_{\infty} \frac{\partial U_{\infty}}{\partial x} = 0 \quad (50)$$

Portanto, aplicando o resultado obtido na equação 50 em 22, pode-se concluir que a equação da quantidade de movimento ou Navier-Stokes na direção x fica expressada por:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (51)$$

A equação 51 e a equação da continuidade serão utilizadas para descrever o perfil de velocidade na camada limite sobre uma placa plana. Veja que mesmo considerando algumas hipóteses para simplificar a equação de Navier-Stokes, ainda encontramos uma grande dificuldade para resolvê-la. A solução para esse problema foi determinada em 1908, pelo engenheiro alemão chamado Paul Richard Heinrich Blasius, que foi um dos primeiros alunos de Prandtl. Tal buscou solucionar as equações da camada limite formada ao longo de uma placa plana, reduzindo a equação 51 que é parcial, em uma equação ordinária não linear. Para isso, utilizou os conceitos de função corrente e mudanças de variáveis (BRANDÃO, 1991) (PITTS; SISSON, 1981).

Figura 3: Perfil de velocidade ao longo da placa



Fonte: Elaborado pelo autor

De acordo com a hipótese de similaridade de Blasius, tal reconhece que o perfil de velocidades está estabilizado ao longo da placa, ou seja, como a placa é infinitamente longa, o perfil é o mesmo em qualquer coordenada x (Figura 3), introduzindo a variável de similaridade η (ÇENGEL; CIMBALA, 2007).

$$\frac{u}{U_{\infty}} = \phi(\eta) \quad (52)$$

A equação 52 possui um termo adimensional que envolve a velocidade dentro da camada limite (u) e a velocidade da corrente livre (U_{∞}). E o termo η é dado como:

$$\eta \approx \frac{y}{\delta} \quad (53)$$

Então, a equação 24 pode ser reescrita como sendo:

$$\delta \approx \frac{x}{\sqrt{Re}} = \sqrt{\frac{\nu x}{U_{\infty}}} \quad (54)$$

Desse modo, podemos determinar uma relação entre a variável de similaridade η adimensional com as variáveis x e y.

$$\eta = \frac{y}{x^{1/2}} \sqrt{\frac{U_{\infty}}{\nu}} \quad (55)$$

Utilizou a função corrente (ψ) em relação à componente u .

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (56)$$

E para a componente v , a função corrente é expressa por:

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (57)$$

Escrevendo a equação da continuidade em termos de função corrente, obtemos que:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (58)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (59)$$

Note que a equação da continuidade fica totalmente satisfeita em termos da função corrente. Então, escrevendo a equação 51 em termos de função corrente.

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \vartheta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (60)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) = \vartheta \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (61)$$

Logo, a equação 62 é uma equação diferencial parcial (EDP) de terceira ordem.

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \vartheta \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \quad (62)$$

A solução da equação 62 vem do método de combinações de variáveis, ou seja, esse método funciona quando o problema em questão permite que associassem x e y em uma só variável adimensional, ou seja, para a camada limite em placa plana temos o termo η determinado na equação 55. Assim, podemos transformar uma equação diferencial parcial (EDP) em uma equação diferencial ordinária (EDO). Então, adimensionalizando a função corrente.

$$f = \frac{\psi}{\vartheta \sqrt{\text{Re}}} \quad (63)$$

Fazendo uma análise dimensional dos termos da equação 62. Tendo em vista que o número de Reynolds é adimensional. Logo ψ e ϑ terão que ter a mesma unidade, para que a termo f seja adimensional. Da equação da função corrente para a componente u , temos que:

$$\partial \psi = u \partial y = [\Psi] = \left[\frac{m}{s} \right] [m] = \left[\frac{m^2}{s} \right] \quad (64)$$

A lei da viscosidade de Newton, nos fornecerá a unidade da viscosidade do fluido.

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = [\text{Pa}] = [\mu] \left[\frac{m}{s} \right] \left[\frac{1}{m} \right] = [\mu] = \left[\frac{\text{kg}}{\text{ms}} \right] \quad (65)$$

Como a viscosidade cinemática do fluido é a fração da viscosidade pela massa específica.

$$\vartheta = \frac{\mu}{\rho} = [\vartheta] = \left[\frac{\text{kg}}{\text{ms}} \right] \left[\frac{\text{m}^3}{\text{kg}} \right] = \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right] \quad (66)$$

Com essas relações conclui-se que f é adimensional. Usando as técnicas do cálculo, iremos determinar as componentes de velocidade u e v em função das variáveis adimensionais f e η . Para buscar um elo entre tais os, partiremos da seguinte expressão:

$$\eta = \frac{y}{x^{1/2}} \sqrt{\frac{U_\infty}{\vartheta}} \quad (67)$$

Determinado $\partial\eta/\partial x$ e $\partial\eta/\partial y$, teremos que:

$$\frac{\partial\eta}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x^{1/2}} \sqrt{\frac{U_\infty}{\vartheta}} \right) \quad (68)$$

Para a derivada em relação à y , temos que x , U_∞ e ϑ serão constantes.

$$\frac{\partial\eta}{\partial y} = \frac{1}{x^{1/2}} \sqrt{\frac{U_\infty}{\vartheta}} \frac{\partial}{\partial y} (y) \quad (68)$$

Portanto, derivada de η em relação a y é dado por:

$$\frac{\partial\eta}{\partial y} = \sqrt{\frac{U_\infty}{\vartheta x}} \quad (69)$$

Analogamente, para derivada em relação a x , teremos que y , U_∞ e ϑ serão constantes.

$$\frac{\partial\eta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{x^{1/2}} \sqrt{\frac{U_\infty}{\vartheta}} \right) = y \sqrt{\frac{U_\infty}{\vartheta}} \frac{\partial}{\partial x} (x^{-1/2}) \quad (70)$$

Com isso, derivada de η em relação a x é pela equação 71.

$$\frac{\partial\eta}{\partial x} = -\frac{y}{2x} \sqrt{\frac{U_\infty}{\vartheta x}} \quad (71)$$

Porém podemos simplificar a equação acima, substituindo a equação 67 na expressão 71.

$$\frac{\partial\eta}{\partial x} = -\frac{1}{2} \eta \frac{1}{x} \quad (72)$$

Desse modo, executando o mesmo procedimento para a equação 63. Frisando que o termo f depende tanto de x e y .

$$\psi = f\vartheta\sqrt{Re} = f\vartheta\sqrt{\frac{U_\infty x}{\vartheta}} \quad (73)$$

Realizando algumas manipulações algébricas para determinar $\partial\psi/\partial y$. Sabendo que ϑ , U_∞ e x são constantes.

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} \vartheta \sqrt{\frac{U_\infty x}{\vartheta}} \quad (74)$$

Seguindo o mesmo raciocínio anterior, é possível determinar a derivada parcial $\partial\psi/\partial x$. Considerado nesse caso que ϑ e U_∞ são constantes.

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \vartheta \sqrt{\frac{U_\infty}{\vartheta}} \frac{\partial}{\partial x} (f x^{1/2}) \quad (75)$$

Aplicando uma regra do cálculo diferencial para determinar a derivada entre x e f , ou seja, utilizando da regra do produto.

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \vartheta \sqrt{\frac{U_{\infty}}{\vartheta}} \left(\frac{f}{2\sqrt{x}} + \frac{\partial f}{\partial x} \sqrt{x} \right) \quad (76)$$

Com as relações matemáticas vista até o momento, podemos propor algumas relações com as componentes de velocidade u e y . Então, aplicando a equação 74 na relação da componente de velocidade u em termos de função corrente ψ , obtêm-se que:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} \vartheta \sqrt{\frac{U_{\infty} x}{\vartheta}} \quad (77)$$

Multiplicando o numerador e denominador por $\partial \eta$, e substituindo a relação 69.

$$u = \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \vartheta \sqrt{\frac{U_{\infty} x}{\vartheta}} = \frac{\partial f}{\partial \eta} \vartheta \sqrt{\frac{U_{\infty}}{\vartheta x}} \sqrt{\frac{U_{\infty} x}{\vartheta}} \quad (78)$$

Então, a componente da velocidade em termos do adimensional f e o termo η , é dada pela equação 79.

$$u = U_{\infty} \frac{\partial f}{\partial \eta} \quad (79)$$

De forma bem similar, aplicando a equação 74 na relação da componente de velocidade v em termos de função corrente ψ .

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\vartheta \sqrt{\frac{U_{\infty}}{\vartheta}} \left(\frac{f}{2\sqrt{x}} + \frac{\partial f}{\partial x} \sqrt{x} \right) \quad (80)$$

Multiplicando o numerador e denominador por $\partial \eta$, e substituindo a relação 72.

$$v = -\vartheta \sqrt{\frac{U_{\infty}}{\vartheta}} \left(\frac{f}{2\sqrt{x}} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \sqrt{x} \right) = -\vartheta \sqrt{\frac{U_{\infty}}{\vartheta}} \left[\frac{f}{2\sqrt{x}} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \left(-\frac{1}{2} \eta \frac{1}{x} \right) \sqrt{x} \right] \quad (81)$$

Fazendo as devidas simplificações na equação acima, chega-se na relação para a componente de velocidade v em termos de f e η .

$$v = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\vartheta U_{\infty}}{x}} \left(\eta \frac{\partial f}{\partial \eta} - f \right) \quad (82)$$

Para escrever a equação da quantidade de movimento em relação a f e η , basta realizar as derivadas da componente u , cuja equação é expressa abaixo:

$$u = U_{\infty} \frac{\partial f}{\partial \eta} \quad (83)$$

A derivada em relação a x é dada por:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = U_{\infty} \frac{\partial f}{\partial \eta} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) = U_{\infty} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \quad (84)$$

Aplicando a equação 72, chega-se a seguinte expressão.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{U_{\infty}}{2x} \eta \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \quad (85)$$

A derivada em relação a y segue a mesma lógica, tendo atenção a respeito da aplicação da equação 69.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = U_{\infty} \sqrt{\frac{U_{\infty}}{\theta x}} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \quad (86)$$

Pela equação 86, é fácil de encontrar a derivada segunda em relação a y .

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(U_{\infty} \sqrt{\frac{U_{\infty}}{\theta x}} \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right) \quad (87)$$

Manipulando e substituindo adequadamente a equação 69, teremos que:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = U_{\infty} \sqrt{\frac{U_{\infty}}{\theta x}} \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} \left(\sqrt{\frac{U_{\infty}}{\theta x}} \right) \quad (88)$$

Portanto, a derivada segunda da componente u em relação a y é expressa pela seguinte relação matemática.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{U_{\infty}^2}{\theta x} \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} \quad (89)$$

Por fim, substituindo as equações 79, 82, 85, 86 e 88 na equação 60. Como as variáveis estão dependendo somente de uma variável, podemos atribuir uma derivada total e assim obter a seguinte equação ordinária não linear.

$$2 \frac{d^3 f}{d\eta^3} + f \frac{d^2 f}{d\eta^2} = 0 \quad (90)$$

A equação 90 ficou conhecida como a equação de Blasius. Tal pode ser resolvida utilizando métodos numéricos, como por exemplo, método de Runge-Kutta.

MODELAGEM MATEMÁTICA

A equação de Blasius para camada limite ao longo de uma placa plana sólida é uma equação diferencial ordinária de terceira ordem, cuja solução é dada pelo método de Runge-Kutta. Definindo as variáveis auxiliares, tem-se que:

$$\frac{df}{d\eta} = z \quad (91a)$$

$$\frac{d^2 f}{d\eta^2} = z' = w \quad (92b)$$

$$\frac{d^3 f}{d\eta^3} = z'' = w' \quad (93c)$$

Reescrevendo a equação do problema de Blasius:

$$2 \frac{dw}{d\eta} + fw = 0 \quad (92)$$

Então podemos substituir uma equação diferencial ordinário de 3ª ordem por um conjunto de três equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem.

$$\frac{df}{d\eta} = z \quad (93a)$$

$$\frac{dy}{d\eta} = w \quad (93b)$$

$$\frac{dw}{d\eta} = -\frac{1}{2}fw \quad (93c)$$

As condições de contorno conhecidas para o problema são apresentadas pelas equações 94a e 94b.

$$\eta = 0 \Rightarrow f = z = 0 \quad (94a)$$

$$\eta \rightarrow \infty \Rightarrow z \rightarrow 0 \quad (94a)$$

Para determinar a outra condição necessária para a solução, aplica-se o método de inspeção de raiz, denominada método de Newton-Raphson. Assim, obtém-se a seguinte condição:

$$w(0) \Rightarrow z(\infty) = 1 \quad (95)$$

Portanto, a solução do problema da camada limite hidrodinâmica ao longo de uma placa paralela pode ser visualizada na tabela 2.

Tabela 2: Resultados numéricos do problema da camada Limite ao redor de uma placa plana

$\eta = y\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}}$	f	$f' = \frac{u}{U_\infty}$	f''
0.000	0.000	0.000	0.332
0.500	0.042	0.166	0.331
1.000	0.166	0.330	0.323
1.500	0.370	0.487	0.303
2.000	0.650	0.630	0.267
2.500	0.996	0.751	0.217
3.000	1.397	0.846	0.161
3.500	1.837	0.913	0.108
4.000	2.305	0.955	0.064
4.500	2.790	0.979	0.034
5.000	3.283	0.991	0.016
5.500	3.780	0.997	0.007
6.000	4.279	0.999	0.002
6.500	4.779	1.000	0.001
7.000	5.279	1.000	0.000
7.500	5.778	1.000	0.000
8.000	6.278	1.000	0.000
8.500	6.778	1.000	0.000
9.000	7.278	1.000	0.000
9.500	7.778	1.000	0.000
10.000	8.278	1.000	0.000

Fonte: Elaborado pelo autor

Com base nos resultados numéricos obtidos pelo método de Runge-Kutta, é possível esboçar algumas grandezas físicas de interesse. Determinando $f' = u / U_\infty = 0,990$ a variável de similaridade deve assumir aproximadamente $\eta \cong 4,90$, então fazendo $y = \delta$ e substituindo tais parâmetros na equação 55, podemos escrever que a espessura da camada limite é dada pela seguinte expressão:

$$\frac{\delta}{x} = \frac{4,90}{\sqrt{Re}} \quad (96)$$

Analogamente, outra grandeza de importância é a tensão de cisalhamento na parede τ_w . Quando $y = 0$ e $\eta = 0$ teremos que $f'' = 0,332$, substituindo tais parâmetros na equação 86 e aplicando na lei de viscosidade de Newton, chega-se ao seguinte resultado.

$$\tau_w = \rho U_\infty^2 \frac{0,332}{\sqrt{Re}} \quad (96)$$

Nesse contexto, como a massa específica e velocidade da corrente livre são constantes, a tensão de cisalhamento diminui em relação a x , devido ao termo $x^{1/2}$.

CONCLUSÃO

A engenharia possui grande macro-áreas de estudo que é responsável em formar uma união entre os conceitos abstratos matemáticos e a prática. Nesse âmbito, a modelagem na engenharia vem buscando descrever de forma mais real possível os diversos fenômenos físicos da natureza, a fim de compreender o comportamento de cada propriedade, grandeza e suas interações com meios internos e externos. Dentre a diversidade de problemas encontrados, a área da mecânica dos fluidos possui um grande destaque, devido às inúmeras aplicações de importância em diversos fenômenos da ciência.

A teoria da camada limite é um tema que ilustra de forma elegante a relação entre teoria e prática, pois o entendimento correto fornece um domínio de um conjunto de fenômenos físicos que estão submetidos a algumas interações com um fluido, isto é, superfícies que estão expostas a um determinado escoamento, como ao redor de uma asa de aeronave ou em tubulações hidráulicas. Contudo, a verdadeira assimilação vem somente com uma base sólida da teoria dos cálculos e equações diferenciais, pois, o conhecimento do fenômeno físico só é amplo se houver uma compreensão da modelagem matemática e da álgebra associada.

As equações diferenciais descrevem boa parte dos problemas encontrados na engenharia, e inclusive os fenômenos relacionados à mecânica dos fluidos que possuem as equações diferenciais como berço de sua modelagem. A partir disso, vale destacar novamente que as técnicas teóricas são de grande relevância para os profissionais de engenharia e aos graduandos, pois tais conhecimentos irão ligar o conjunto teórico acadêmico com a prática, fornecendo uma visão mais abrangente do problema e de suas variações.

REFERENCIAS

BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Contorno** (9ª edição). LTC Editora. Rio de Janeiro, 2013.

BRANDÃO, F.C., 1991. **Algoritmos em diferenças finitas para solução de a camada limite hidrodinâmica laminar com variáveis primitivas**. Dissertação de Mestrado: Universidade Estadual de Campinas. São Paulo, Campinas. Brasil.

CARVALHO, Márcio Luiz Bunte; MAIA, Miriam Lourenço. **Cálculo Numérico (com aplicações)**. São Paulo: Editora Harbra Ltda, 1987.

CANEDO, Eduardo Luis. **Fenômenos de transporte**. Grupo Gen-LTC, 2000.

FOX, Robert W.; MCDONALD, Alan T.; PRITCHARD, Philip. **Introdução à mecânica dos fluidos**. Livros Técnicos e Científicos, 2006.

FREIRE, A. **Turbulência e seu desenvolvimento histórico**. III Escola de Primavera de Transição & Turbulência, p. 23-27, 2002.

FREIRE, A. P. **Teoria de Camada Limite**. Programa de Engenharia Mecânica: Universidade Federal do Rio de Janeiro. 1990.

GILAT, Amos; SUBRAMANIAM, Vish. **Métodos numéricos para engenheiros e cientistas: uma introdução com aplicações usando o MATLAB**. Bookman Editora, 2009

KREYSZIG, E. **Matemática superior para engenharia**. Livros técnicos e científicos, 2009.

PITTS, Donald R.; SISSON, Lighth E. Fenômenos de transporte. **São Paulo, Brasil**, p. 319-328, 1981.

ZILL, Dennis G.; CULLEN, Michael R. **Equações Diferenciais**. Tradução Alfredo Alves de Faria. 2001.

ÇENGEL, YA CIMBALA. **JM Mecânica dos fluidos: Fundamentos e aplicações**. 2007.

VALLE, KNF. **Métodos Numéricos de Euler e Runge-Kutta**. Monografia apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática para Professores com Ênfase em Cálculo da UFMG, como parte dos requisitos à obtenção do título de Especialista em Educação Matemática, Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), Belo Horizonte, Brasil, 2012.